sodik osztályosok gyönyörködjenek szobrokban, középületekben, rajzokban, készítsenek mesékről egyszerű illusztrációkat. A harmadikosok felnőttek segítségével nézegessenek megfelelő művészeti alkotásokat, azok reprodukcióit, elemzésükre tanítgatni kell őket, s fejlődjön ki bennük saját rajzuk és az ábrázolt tárgy összehasonlításának képessége is. A negyedik osztályban szívesen nézzék nagy festők tájképeit, csendéleteit, arcképeit, ismereteiknek megfelelő történelmi témájú képeit, gyűjtsék a reprodukciókat, látogassák a múzeumokat, díszítsék osztályukat stb.

Nem elég az esztétikai nevelés folyamatában az ismeretek, élmények, tevékenységek összefogására, összekapcsolására törekednie a nevelőknek. *Esztétikai igényt, érdeklődést is kell fakasztaniuk a tanulókban.* Mert az esztétikai nevelésre is vonatkozik, hogy nemcsak egy bizonyos igényt kell kielégítenünk, hanem újabb és egyre magasabb igényt, újabb és egyre magasabb művészi érdeklődési szint felé kell vinnünk, emelnünk tanítványainkat.

DR. GAZSÓ ISTVÁN
főiskolai docens, Szeged

Kombinatorikai feladatok az alsó tagozaton

Általános iskolánk matematika tantervében nem szerepelnek a kombinatorika elemei, sőt, azt jelenleg középiskoláinkban sem tanítják mindenütt. Az iskolai matematika: a tananyag korszerűsítésére irányuló törekvések kibontakozásától és az ennek eredményeként születő új tantervektől azonban azt várhatjuk, hogy a tanulók matematikai gondolkodásának kialakításában — egyebek között — szerepet kapnak a kombinatorikai feladatok is.

Addig is, míg a tantervreform egyszer elkerülhetetlenül napirendre kerül,[1] annak minél jobb előkészítése érdekében —, kísérleteznünk kell a bevezetésre szánt új tananyagok és új módszerek alkalmazásával, mégpedig nem csupán az e célra szervezett reform-iskolákban.

Az alábbiakban néhány feladat tárgyalása során bemutatjuk, hogy van lehetőség kombinatorikai feladatok megoldatására az alsó tagozaton, már az első osztálytól kezdve, a tanulók túlterhelése nélkül, a jelenlegi tantervi és óratervi keretek megtartásával, esetleg csekély módosításával.

a) A gyermeki társasjátékok egyik jól ismert szereplője a *dobókocka.* Többnyire segédeszközként használják a lóversenyszerű játékokban, bár néha önállóan is. A számtan órákon is használjuk szemléltető eszközként, főleg az első osztályban. Például az *öt* bontásakor, az ötös számkörben végzett összeadásoknál, vagy az ötre vonatkozó pótlásoknál, miközben ilyen kérdésekre válaszolnak a tanulók:

Két dobásra ötöt dobtunk, mennyit dobtunk külön-külön?

Első dobásunk 2 volt, a második 3, mennyit dobtunk összesen?

Első dobásunk 3 volt, mennyit kellene dobnunk másodszorra, hogy összesen 5 legyen?

[1] Lásd ezzel kapcsolatban *Varga Tamás Komplex módszer a 6 éves kortól kezdődő matematikatanításban* című cikkét. — Korszerű módszerek és eszközök az iskolareform szolgálatában, Pedagógiai Közlemények. Tankönyvkiadó, 1966.

Megfelelő átalakítással kisebb számokra, vagy 6-ra, 7-re vonatkozólag is tehetünk fel hasonló kérdéseket. A nagyobb számoknál korlátozottan, illetve még jobban átalakítva szerepeltethetjük őket, (pl. három dobást engedünk meg, azaz háromtagú bontásokra, illetve összeadásokra vezető kérdéseket adunk).

Ilyen előzmények után, ha jól ismerik is a dobókockát, még mindig újszerű lesz a tanulók számára a következő feladat:

A) Hányféleképpen dobhatunk két dobással ötöt?

Ebben ugyanis az első szón van a hangsúly. Nem az érdekel bennünket elsősorban, hogy *melyek* a lehetséges esetek, hanem, hogy *hány* ilyen eset van. Így tehát ez már nem csupán bontási, vagy pótlási feladat — habár azokat is tartalmazza, —, hanem tipikus kombinatorikai feladat, mert a kombinatorika „általában bizonyos elemek elhelyezési lehetőségeit vizsgálja”.[2]

Azzal, hogy az 5-ös számkörből vett bontási feladatból indultunk ki, még nem mondtuk, mikor kerüljön sor az A) feladat kitűzésére. E kérdésre majd a tapasztalat ad választ és azt erősen befolyásolhatják a helyi körülmények is. Nem valószínű, hogy hasznos volna már az ötös számkörben elővenni, a tízes számkörben azonban talán már sor kerülhet rá.

Ettől függetlenül érdemes kissé elidőznünk ennél az egyszerű feladatnál, mert bemutathatjuk a megoldásán, hogy milyen gondolatmenettel nyerjük a hozzá hasonló feladatok teljes megoldását. Hangsúlyozzuk: ezúttal előbb a magunk számára, nem a gyermekek szemével nézzük az A) feladatot. Általánosítsunk, így:

A Hányféleképpen dobhatunk a dobókockával ötöt?*

Megoldás: *Egy dobással:* csak egyféleképpen, amikor éppen 5-öt dobunk.

Két dobással:

Esetek	1. dobás	2. dobás	Az eredmény jelölése
I.	1	4	14
II.	2	3	23
III.	3	2	32
IV.	4	1	41

A lehetséges esetek száma: 4. Ez egyúttal válasz az A) feladat kérdésére.

Három dobással:

Esetek	1. dobás	2. dobás	3. dobás	Jelölése
I.	1	1	3	113
II.	1	2	2	122
III.	1	3	1	131
IV.	2	1	2	212
V.	2	2	1	221
VI.	3	1	1	311

[2] *Új Magyar Lexikon,* IV.

A lehetséges esetek száma: 6.

Négy dobással:

Esetek	1. dobás	2. dobás	3. dobás	4. dobás	Jelölése
I.	1	1	1	2	1112
II.	1	1	2	1	1121
III.	1	2	1	1	1211
IV.	2	1	1	1	2111

A lehetséges esetek száma: 4.

Öt dobással: ismét csak *egyetlen esetben* kapunk 5-öt, ha minden alkalommal 1-et dobunk.

Hat vagy ennél több dobás *már nem jöhet szóba,* hiszen minden dobással legalább 1-et kapunk, mivel 0 nem szerepel a kocka egyik lapján sem.

E részletesen tárgyalt általános megoldás legfontosabb tanulságai számunkra:

egyetlen dobással 6-nál nagyobb összeget sosem kaphatunk;

12-nél, (18-nál, stb.) nagyobb összeget már két (három stb.) dobással sem dobhatunk;

a két, három ... dobással elérhető összegek lehetséges eseteinek száma véges és könnyen meghatározható, ha alkalmas módon rendszerbe gyűjtjük őket.

b) Kombinatorikai feladatra vezet a következő kérdés is:

Jancsinak és Juliskának összesen 5 Ft-ja van. Mennyi pénzük lehet külön-külön?

Azért, hogy a kérdéssel érdemben foglalkozhassunk, szabjunk bizonyos feltételeket. Például kössük ki, hogy

I. *az egyik gyermek pénze külön van.* — Mondjuk, Jancsi pénze külön, az ő pénztárcájában van. — Ezzel kizártuk azokat az eseteket, amikor pontosan nem lehet elkülöníteni a két gyermek pénzét. Pl. e kikötés után nem lehet Jancsié az 5 Ft kétharmada, stb.

Kössük ki még azt is, hogy

II. *az egyik gyermeknek nincs 50 filléresnél kisebb értékű pénzdarabja.* — Ezzel tovább szűkítettük a lehetőségek körét.

Feladatunk tehát így fogalmazható:

B) *Jancsinak és Juliskának összesen 5 Ft-ja van. Hányféleképpen lehetséges ez, ha még azt is tudjuk, hogy Jancsi pénze külön van és a pénzdarabjai között nincsen kisebb 50 filléresnél?*

Megoldás:

Esetek	Jancsi pénze Ft	Jancsi pénze fill.	Juliska pénze Ft	Juliska pénze fill.	Az elosztás jelölése
I.	0	00	5	00	500
II.	0	50	4	50	50450
III.	1	00	4	00	100400
IV.	1	50	3	50	150350
V.	2	00	3	00	200300
VI.	2	50	2	50	250250
VII.	3	00	2	00	300200
VIII.	3	50	1	50	350150
IX.	4	00	1	00	400100
X.	4	50	0	50	450050
XI.	5	00	0	00	500000

A feladatnak 11 lehetséges megoldása van. Mivel táblázatunk ezeket nagyság szerinti sorrendben mutatja, ami jól látszik az elosztás jelölésén, biztosak lehetünk benne, hogy nem hagytunk ki egyet sem.

A II. kikötés néhány lehetséges módosítása:

II/a Egyik gyermeknek nincs 20 fillérnél kisebb értékű pénzdarabja.

II/b Egyik gyermeknek nincs 10 fillérnél kisebb értékű pénzdarabja.

II/c Egyik gyermeknek nincs 5 fillérnél kisebb értékű pénzdarabja.

Ezekkel újabb feladatokat nyerünk. Megoldásukat szintén legcélszerűbb táblázatba gyűjtve áttekinteni. Könnyen észrevesszük, hogy minél kisebb értékű pénzdarabok előfordulását engedjük meg, az esetek száma annál nagyobb, de még mindig véges.

c) A B) feladattal kapcsolatban felvethető ez a kérdés is:

C) Hányféle alakban fordulhat elő a két gyermek pénze?

A megoldást csak elkezdjük. Felsoroljuk a 4. táblázat I. esetének lehetséges változatait:

Jancsi pénze Ft	Jancsi pénze fillér	Juliska pénze Ft	Juliska pénze fillér
0	00	2+2+1	00
		2+2	50+50
		2+1+1+1	00
		2+1+1	50+50
		2+1	50+50+50+50
		2	50+50+50+50+50+50
		1+1+1+1+1	
		1+1+1+1	50+50
		1+1+1	50+50+50+50
		1+1	50+50+50+50+50+50
		1	50+50+50+50+50+50+50+50
		0	50+50+50+50+50+50+50+50+50+50

Ezzel lényegében arra feleltünk, hogy az 5 Ft-ot, (Juliska pénzét) hányféleképpen lehet kifizetni, visszaadás nélkül, csupán 2 és 1 Ft-osokkal és 50 filléressel.

Ha azonban Jancsinak is van pénze, pl. 3 Ft 50 fillér, akkor annak mindegyik lehetséges változatát kapcsolhatjuk a Juliska pénzének bármelyik lehetséges felbontásához.

Végül tehát az esetek száma igen nagy is lehet, különösen a sok aprópénzt megengedő II/c feltétellel. A gyermek — mikor első alkalommal találkozik ilyen kérdéssel — könnyen rávágja, hogy „Sok!", mintha reménytelen vállalkozás volna a választ megkeresnie. A fokozatosság betartásával azonban elvezethetjük annak belátásáig, hogy az esetek száma még mindig véges és azt türelemmel, szorgalommal, főként pedig ügyesen választott módszerrel meg is határozhatja.

A tanítónak tudnia kel, hogy a B) feladatból kihagyva a kikötéseket, a kapott feladatnak végtelen sok megoldása lehetséges. Ezt azonban már ne akarja beláttatni az alsótagozati tanulókkal!

d) Új számkörben (ezresben, tízezresben stb.) tájékozódás és a nagy számokkal való ismerkedés céljából gyakran adunk ilyen módon feladatokat:

három, (négy, öt ...) kartonlapra írt számot teszünk a tábla elé és azt mondjuk, „Állítsátok olyan sorrendbe a számokat, hogy egybeolvasva a legkisebb (legnagyobb) számot adják!"[3]

Ezzel kapcsolatban a következő kombinatorikai feladatot nyerjük:

D) Hányféleképpen lehet sorbaszedni az adott számokat, hogy egybeolvasva egymástól eltérő számokat kapjunk?

Megoldás: Induljunk ki a nyerhető legkisebb számból (amit nyilván az adott számok növekvő sorozata ad), majd alakítsuk át azt fokozatosan egy-egy szám áthelyezésével mindig nagyobbra, míg csak a nyerhető legnagyobb számig nem jutunk, (ezt pedig az adott számok csökkenő sorozata adja).

Példa: Ha a számok 5, 3, 8 és 1, akkor a képezhető legkisebb szám 1358; a legnagyobb 8531; a lehetséges esetek pedig

1358	1385	1538	1583	1835	1853
3158	3185	3518	3581	3815	3851
5138	5183	5318	5381	5813	5831
8135	8153	8315	8351	8513	8531

A lehetséges esetek száma: 24

Két, három, négy adott számmal végzett „kísérlet" után itt már felbukkanhat a kérdés: hogyan lehetne számítással ellenőrizni a lehetséges esetek számát? — Szabály és képlet alkotására ne törekedjünk, de konkrét példákon észrevételtethetjük azt az alapgondolatot, ami idővel majd — talán a felső tagozaton — elvezet a szabályhoz is, (ti. hogy az első helyre kerülhet bármelyik adott szám, ha ezt kiválasztottuk, a második helyre már csak eggyel kevesebb közül választhatunk stb.).

Az adott számokat szaporítva nem találkozunk új gondolattal, legfeljebb többet kell írnunk. Ezzel szemben egyes számok ismétlődésének, vagy bármelyik szám ismétlődésének megengedése hozhat változatosságot.

Példák: Képezzük az összes háromjegyű számokat, amelyekben csak az 1, 2, 3 számjegyek szerepelnek!

Képezzük az összes négyjegyű számokat, amelyekben csak az 1, 2 és 0 számjegyek szerepelnek!

Megoldásukat végezze el az olvasó!

e) *További feladatokat* keresve, először is a már tárgyalt feladatok új köntösben való megjelenéseit, újra fogalmazását említhetjük. Erre példák:

Írjuk fel az összes

a) kétjegyű; b) háromjegyű; c) négyjegyű számokat, amelyekben a számok összege 5!

A megoldásokat nyilvánvalóan megadják az A*) feladat megoldásait tartalmazó 1., 2. illetve 3. táblázatokban „Az eredmény jelölése" rovatok, de ki kell egészítenünk azokat a 0 megjelenésével alkotható számokkal, (mert a dobókockán nem volt 0, de a számjegy most 0 is lehet). Ennek folytán pl. az 1. táblázat I. esete 05; VI. esete 50 lesz; stb.

Szóba jöhetnek még asztal körüli ülésrenddel; egy örs tagjainak fényképcseréjével, kézfogásával, körmérkőzésével; adott színekből zászlók tervezésével; vagy vetés-

[3] A 3. és 4. osztály tankönyvében is találunk ilyen feladatokat. A 3. osztály 27. o. 34. feladata, vagy a 32. o. 83. feladata szinte már kifejezetten kombinatorikai feladat.

forgóval kapcsolatos feladatok. Számíthatunk a tanulók által gyűjtött kérdésekre is. Valószínű, hogy már néhány kombinatorikai feladat vizsgálata után felteszik a népszerű szerencsejátékok — a Totó és a Lottó — szelvényeinek kitöltésével kapcsolatos kérdéseket is. Ezekkel azonban korai volna foglalkoznunk, megoldásukat halasszuk a felső tagozatra, ott egy „talált" órán sorra vehetjük őket. A tanító azonban ismerje ezek megoldásait is,[4] ez megóvja az elhamarkodott, esetleg téves kijelentésektől, attól, hogy szaván fogják.

Az itt tárgyalt és a hozzájuk hasonló feladatok megoldatásán kívül többre nem gondolunk, tehát az alsó tagozaton *nem javasoljuk új fogalmak, definíciók, elnevezések bevezetését* sem. E feladatok sajátsága, hogy kérdéseikre nem lehet ilyesféle gépies válaszokat adni: „Meg tudom összeadással, (szorzással) ...", hanem szinte matematikai kutató munkát követelnek a tanulóktól. Ez a főértékük és a módszer, amellyel megoldhatók. Megéri a töprengést, fáradságot, amibe a megértésük és elsajátításuk kerül. Mindez bőséges szemléltetéssel, az érdeklődés felkeltésével és a fokozatosság elvének érvényesítésével elérhető.

Sok időt nem tölthetünk a kombinatorikai feladatokkal. Érdekes, „fogós" feladatként azonban ismételten elővehetjük őket, az előző osztályban megoldottakat is, eltérő számkörben, nagyobb számokkal, főleg a gyakorlásra és ismétlésre szánt órákon. Ajánlott, nem kötelező házi feladatokat tűzhetünk ki közülük, kissé módosított feltételekkel, az órán megoldottakhoz képest.

A kombinált, kombináció, kombinát, vagy a variál, variáció stb. szavak széleskörű elterjedése, gyakori használata is bizonyítja, hogy napjainkban egyre többen alkalmazzák a kombinatorikát. Nemcsak a szerencsejátékokban, vagy a különféle sporteredmények nyomán várható sorrendek tippelgetésében, hanem alkotó módon is: az újító munkás, a mérnök, művész, zeneszerző, divattervező stb. — mindenki, aki fontolgat, sorraveszi a tevékenységi körében lehetségesnek látszó eseteket, hogy közülük kiválassza a megvalósítandókat.

Dr. Bán Ervin
tanár, Szeged

Az anyanyelv és a nyelvtan szerepe a tagozatos általános iskolai osztályok nyelvtanításában

Az általános iskolai nyelvtanítás a közelmúltig a felső tagozat orosz óráit jelentette. Néhány éve azonban a fogalom és a vele kapcsolatos vizsgálódások szükségessége kiterjedt a 3—4. osztályra és a nyugati nyelvekre is: megszervezték a harmadik osztályban kezdődő nyelvtanítást. Bátor és szükséges kezdeményezés volt. Külföldön már történtek kísérletek, különösen a Szovjetunióban és Svédországban. Nagyobb eredményt várunk tőle, mint az eddigi rendszertől? Helyénvaló a radikálisabb megfogalmazás: *ez* nálunk az igényes, komoly gyakorlati eredményt ígérő nyelvtanítás egyetlen reális útja. Az ötödik osztályban vagy a középiskolában megkezdett nyelvtanulás, főleg, ha heti három órával kell beérnie, csak nagyon mérsékelt ered-

[4] Egyszerű feldolgozásban megtalálható pl. a közismert *Obádovics: Matematika* Kombinatorika c. fejezetében.